

PRIMJENA SIMBOLIČKE ANALIZE U PROJEKTOVANJU EFIKASNIH DIGITALNIH FILTARA¹

Budimir Lutovac, Elektrotehnički fakultet Podgorica

I UVOD

U radu se opisuje problematika efikasnih digitalnih filtara. Reč je o filtrima koji treba da razriješe oprečne zahtjeve za velikom brzinom rada i malom potrošnjom, kao i tačnošću obrade i složenošću algoritama. Precizno izdvajanje signala određene učestanosti uz zadati gabarit zahtijeva veoma složene algoritme ili filtre sa velikim brojem koeficijenata. Da bi sve aritmetičke operacije koje se izvršavaju u realnom vremenu između dva odbirka mogle da se uspješno obave potrebno je ili smanjiti broj operacija ili dužinu koeficijenata i broj koeficijenata filtra. Ujedno, potrebe za sve većom brzinom rada zahtijevaju sve višu frekvenciju takta, što skraćuje vrijeme kada se mogu izvršiti obrade i prouzrokuje probleme hlađenja čipa sa velikom integracijom komponenti (VLSI). Vrijeme potrebno za hardversko izvršenje operacije množenja je znatno veće od vremena potrebnog za aritmetičku operaciju sabiranja tako da se brzina rada može značajno povećati ako se množenje zamijeni operacijama binarnog pomeranja, koje ne zahtijeva posebno vrijeme za izvršenje, ili operacijama binarnog pomjeranja i malog broja sabirača. U radu je predstavljen proračun optimalnih FIR filtara i to direktno, bez primjene iterativnih algoritama, da bi optimizovali koeficijente za implementaciju množača. Takođe, korišćen je algoritam koji omogućava projektovanje IIR filtara nižeg reda koji imaju koeficijente množenja zasnovane ili samo na operacijama binarnog pomeranja, ili na operacijama binarnog pomeranja i malog broja sabirača. Realizacija digitalnih talasnih filtara (Wave Digital Filters - WDF) bazirana je na mrežama sa dva pristupa (engleski izraz two-port adaptor), u čijoj realizaciji se koriste sabirači, jedan množač i u kojima nema elemenata za kašnjenje. Razmatra se 5 vrsta ovih mreža koje su predložene u radu [14]. Da bi se analizirale sve moguće realizacije koje se mogu dobiti na ovaj način, korišćena je kompjuterski orjentisana, automatska simbolička analiza, kao efikasniji pristup analize i projektovanja digitalnih filtara.

II ALGEBARSKI IZRAZI ZA PROJEKTOVANJE FIR FILTARA

Filtri koji radni frekvencijski opseg diskretnog sistema dijele na dva jednaka dijela nazivaju se half-band filtri.

Half-band filtri se primjenjuju u sistemima koji rade sa promjenljivom učestanošću odabiranja, i to posebno u slučajevima kada je odnos između učestanosti odabiranja u pojedinim djelovima sistema 2^p gdje je p cio broj [1]. Ovi filtri se, takođe, koriste za decimaciju kod A/D konverzije. Kao half-band filtri se najčešće koriste FIR filtri zbog pogodnosti u uštedi broja aritmetičkih operacija, kao i zbog linearne fazne karakteristike. Realizacija ekonomičnih half-band IIR filtara je od značaja, kada nije potrebno voditi računa o fazi, ali treba imati u vidu da je i sa IIR filtrima moguće ostvariti potpuno linearnu faznu karakteristiku [2]. Za izračunavanje koeficijenata filtra isključivo se koriste numerički algoritmi.

Efikasne digitalne filtarske strukture za različite primjene mogu se dobiti korišćenjem AP (All Pass) podfiltara kao modula [3], [4]. Konvencionalni digitalni filtri (klasične niskopropusne i visokopropusne prenosne funkcije neparnog reda) se mogu realizovati kao paralelna veza dva AP filtara [3]. AP podfiltri su takođe osnovni moduli rekurzivnih half-band i filtara N-tog reda, koji su veoma efikasni u sistemima sa promjenljivom učestanošću odabiranja. U radu [5] je predložen sistematski metod za projektovanje amplitudsko-selektivnih digitalnih filtara propusnika niskih učestanosti sa približno linearnom faznom karakteristikom u propusnom opsegu. Filtarske strukture koje se razmatraju su konvencionalne kaskadne realizacije i realizacije u vidu paralelne veze dva AP filtra (rešetkasti digitalni talasni filtri). U prelaznom opsegu, maksimalna vrijednost amplitude je ograničena i ona je manja od maksimuma ili jednaka maksimumu u propusnom opsegu, ili je realna amplitudska funkcija prinudno monotono opadajuća. Primjeri pokazuju da su rezultirajući optimizovani rekurzivni filtri superiorni u odnosu na odgovarajuće linearno fazne FIR filtre u primjenama uskopojasnog filtriranja u zahtijevanom broju množača, sabirača i elemenata za kašnjenje [4].

Kada razmatramo paralelnu vezu dva AP filtra, koeficijent osjetljivosti je veoma nizak u propusnom opsegu, ukoliko su AP filtarske strukture takve da njihova funkcija prenosa ostane AP, uprkos kvantizaciji koeficijenata. Ipak, osjetljivost u nepropusnom opsegu

¹ Ovaj rad je dio doktorata odbranjenog na ETF-u u Beogradu marta 2003. godine pod mentorstvom prof.dr Branimira Reljina.

nije tako dobra. Ispostavlja se da je, u većini slučajeva, zahtijevana dužina digitalne riječi proporcionalna zahtijevanom slabljenju u nepropusnom opsegu. Otuda zahtjevi za dužinom digitalne riječi se mogu smanjiti, ako se filter realizuje kao kaskadna veza podfiltera sa nižim slabljenjima u nepropusnom opsegu, ili kao što je predloženo u radu [6] kao direktna struktura (transverzalni filter) međusobno povezanih identičnih podfiltera.

Da bi smanjili osjetljivost amplitudske karakteristike u nepropusnom opsegu kod struktura koje se realizuju kao kaskadna veza dva AP filtera, u radu [7] je predložena struktura koja se sastoji iz kaskadne veze rešetkastih digitalnih talasnih filtera. Glavna prednost predložene strukture, u poređenju sa rešetkastim digitalnim filtrom, je ta što su polovi nove strukture znatno dalji od jedinične kružnice tj bliži koordinatnom početku. Zbog toga broj bita neophodnih za predstavljanje i podataka i koeficijenata se značajno smanjuje. Nedostatak predloženog metoda se ogleda u blagom porastu reda ukupnog filtera. Pravilnim izborom broja i reda rešetkastih digitalnih talasnih filtera, uz odgovarajuću optimizaciju, njihovi koeficijenti se mogu predstaviti sa nekoliko stepeni broja 2. Half-band filteri moraju da zadovolje uslov da su varijacije amplitudske karakteristike u propusnom i u nepropusnom opsegu identične, kao i uslov simetrije učestanosti [8]. Half-band FIR filteri se često koriste zbog njihove linearne fazne karakteristike. Cilj je izraziti koeficijente FIR filtera u zatvorenom obliku u funkciji granice nepropusnog opsega. Takav rezultat bi nam omogućio proračun optimalnih FIR filtera, direktno, bez primjene iterativnih postupaka uz optimizaciju koeficijenata za implementaciju množača. Za projektovanje FIR filtera sa lineranom fazom i izjednačenom talasnošću amplitudske karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu najčešće se koristi Parks-McClellan algoritam koji koristi Remezov algoritam. Najkraći metod projektovanja, koji je pogodan i za filtre visokog reda nazivamo half-band trik koji je predložen u radu Vaidyanathana [9].

Red half-band FIR filtera sa linearnom fazom mora da bude paran $n=4K+2$, $K=0, 1, 2, \dots$, gdje je $n=2, 6, 10, 14, \dots$. Polazeći od half-band trika možemo izvesti rješenje u zatvorenom obliku za aproksimaciju half-band FIR filtera drugog, šestog i desetog reda. Funkcija prenosa half-band FIR filtera linearne faze može se predstaviti u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{1}{2}(a_2(1+z^{-2})+z^{-1}) \\ H_6(z) &= \frac{1}{2}(a_6(1+z^{-6})+b_6(z^{-2}+z^{-4})+z^{-3}) \\ H_{10}(z) &= \frac{1}{2}(a_{10}(1+z^{-10})+b_{10}(z^{-2}+z^{-8})+c_{10}(z^{-4}+z^{-6})+z^{-5}) \end{aligned} \quad (1)$$

Funkcija Matlab-a `remez(n, [0 2*fp 1-2*fp 1], [1100])` iterativno izračunava koeficijente gdje granična učestanost propusnog opsega mora biti iz opsega $0 < f_p < 1/4$. Polazeći od half-band trika [9], možemo izvesti funkciju $G(z)$, $(2K+1)$ reda čiji je red jednak polovini reda početnog filtera,

$$G_{(2K+1)}(z) = z^{-(2K+1)/2} (2z^{(2K+1)/2} H_{4K+2}(z^{1/2}) - z^{-(2K+1)/2}) \quad (2)$$

Prve tri funkcije možemo predstaviti u formi :

$$\begin{aligned} G_1(z) &= z^{-1/2}(a_2(z^{1/2}+z^{-1/2})) \\ G_3(z) &= z^{-3/2}(a_6(z^{3/2}+z^{-3/2})+b_6(z^{1/2}+z^{-1/2})) \\ G_5(z) &= z^{-5/2}(a_{10}(z^{5/2}+z^{-5/2})+b_{10}(z^{3/2}+z^{-3/2})+c_{10}(z^{1/2}+z^{-1/2})) \end{aligned} \quad (3)$$

Uvodeći smjenu $z = e^{j2\pi f}$ i $\cos(n\pi f) = C_n(x)$ i koristeći relaciju $z^{n/2} + z^{-n/2} = 2\cos(n\pi f)$, možemo izraziti frekvencijski odziv $G_n(e^{j2\pi f}) = A_n(f)e^{-j\pi n f}$ u funkciji Chebyshev-ljevog polinoma C_n sa nezavisno promjenljivom x kao:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= 2(a_2 C_1(x)) \\ A_3(x) &= 2(a_6 C_3(x) + b_6 C_1(x)) \\ A_5(x) &= 2(a_{10} C_5(x) + b_{10} C_3(x) + c_{10} C_1(x)) \end{aligned} \quad (4)$$

Pošto amplitudska karakteristika nije diferencijabilna, $|G_n(e^{j2\pi f})| = |A_n(f)|$, razmatramo realni amplitudski odziv $A_n(f)$ ili amplitudsku funkciju $A_n(x)$ [8]. Amplitudska funkcija dostiže minimum i maksimum za $x = 1$:

$$A_{2K+1}(1) = \begin{cases} 2 - A_{2K+1}(x_p), & k \text{ neparno} \\ A_{2K+1}(x_p), & k \text{ parno} \end{cases} \quad (5)$$

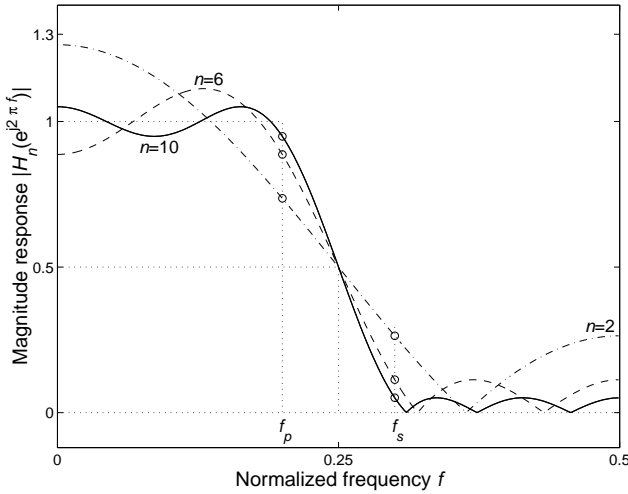
Amplitudske funkcije prvog, trećeg i desetog reda su neparni polinomi oblika:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= 2a_2 x \\ A_3(x) &= a_6(8x^3 - 8x) + 2b_6 x \\ A_5(x) &= 2(a_{10}(16x^5 - 20x^3 + 5x) + b_{10}(4x^3 - 3x) + c_{10} x) \end{aligned} \quad (6)$$

Na osnovu relacija (5) i (6) možemo izraziti koeficijente u funkciji granične učestanosti na sledeći način:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{1 + \cos(2\pi f_p)} \\ b_6 &= \frac{3 - 9x_p - 9x_p^2 + 2\sqrt{3(1+x_p+x_p^2)^3}}{4(-2+x_p+x_p^2)^2} \\ b_6 &= \frac{3 - 9x_p - 9x_p^2 + 2\sqrt{3(1+x_p+x_p^2)^3}}{4(-2+x_p+x_p^2)^2} \\ a_{10} &= \frac{3}{16} \frac{1}{3-5q-2q^2\sqrt{q-5r+15qr+10qr\sqrt{q}}} \\ b_{10} &= 5 \left(a_{10} - \frac{1}{4} \frac{q+r}{3-5q-2q^2\sqrt{q-5r+15qr+10qr\sqrt{q}}} \right) \\ c_{10} &= 3b_{10} - 5a_{10} + \frac{15qr}{3-5q-2q^2\sqrt{q-5r+15qr+10qr\sqrt{q}}} \end{aligned} \quad (7)$$

Na slici 1 je prikazana amplitudska karakteristika half-band FIR filtra linearne faze i izjednačene talasnosti čiji su koeficijenti izračunati za graničnu učestanost propusnog opsega $f_p = 0.2$.



Slika 1: Amplitudska karakteristika optimalnog half-band FIR filtra linearne faze

III HALF-BAND IIR FILTAR BEZ MNOŽAČA

Filtriranje filtrom $H(z^2)$ poslije kojeg slijedi umanjjenje učestanosti odabiranja (decimacija) je ekvivalentno slučaju u kojem prvo imamo smanjenje učestanosti odabiranja, a zatim filtriranje sa $H(z)$. Zbog niže brzine odabiranja sva izračunavanja su smanjena za faktor 2. Half-band IIR filtar propusnik niskih učestanosti neparnog reda sa funkcijom prenosa oblika:

$$H_{LP}(z) = H_a(z^2) + z^{-1}H_b(z^2)$$

$$H_a(z^2) = \prod_{i=1,3,\dots}^{(n-1)/2} \frac{\beta_i + z^{-2}}{1 + \beta_i z^{-2}} \quad (8)$$

$$H_b(z^2) = \prod_{i=2,4,\dots}^{(n-1)/2} \frac{\beta_i + z^{-2}}{1 + \beta_i z^{-2}}$$

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{(n-1)/2} < 1$$

koji slijedi poslije kola za decimaciju može biti ostvaren pomoću decimatora, nakon koga slijede filtri propusnici svih učestanosti.

$$H_a(z^2) = \prod_{i=1,3,\dots}^{(n-1)/2} \frac{\beta_i + z^{-1}}{1 + \beta_i z^{-1}} \quad (9)$$

$$H_b(z^2) = \prod_{i=2,4,\dots}^{(n-1)/2} \frac{\beta_i + z^{-1}}{1 + \beta_i z^{-1}}$$

Procedura projektovanja je zasnovana na specijalnoj klasi eliptičkih funkcija prenosa minimalnih Q faktora (EMQF) [8]. IIR filtre koji su dobijeni bilinearnom transformacijom iz eliptičkog prototipa minimalnih Q faktora i koji su realizovani u vidu paralelne veze dva propusnika svih učestanosti moguće je realizovati bez množača [10], [11], [12]. Polazeći od procedure za projektovanje half-band IIR filtra koja je data u [8],

moguće je napisati novi, zatvoreni oblik relacija u obliku:

$$z_i = \frac{(\xi + x_i^2) - \sqrt{\xi \tan(\pi f_p) \sqrt{1 - x_i^2} \sqrt{\xi^2 - x_i^2}} + jx_i(\xi + 1)\sqrt{\xi \tan(\pi f_p)}}{(\xi + x_i^2) + \sqrt{\xi \tan(\pi f_p) \sqrt{1 - x_i^2} \sqrt{\xi^2 - x_i^2}} - jx_i(\xi + 1)\sqrt{\xi \tan(\pi f_p)}} \quad (10)$$

Znajući da je $\beta_i = r_i^2 = |z_i|^2$ koeficijente β_i možemo izraziti u obliku:

$$\beta_i = \frac{\left((\xi + x_i^2) - \sqrt{\xi \tan(\pi f_p) \sqrt{1 - x_i^2} \sqrt{\xi^2 - x_i^2}} + (x_i(\xi + 1)\sqrt{\xi \tan(\pi f_p)})^2 \right)^2}{\left((\xi + x_i^2) + \sqrt{\xi \tan(\pi f_p) \sqrt{1 - x_i^2} \sqrt{\xi^2 - x_i^2}} + (x_i(\xi + 1)\sqrt{\xi \tan(\pi f_p)})^2 \right)^2} \quad (11)$$

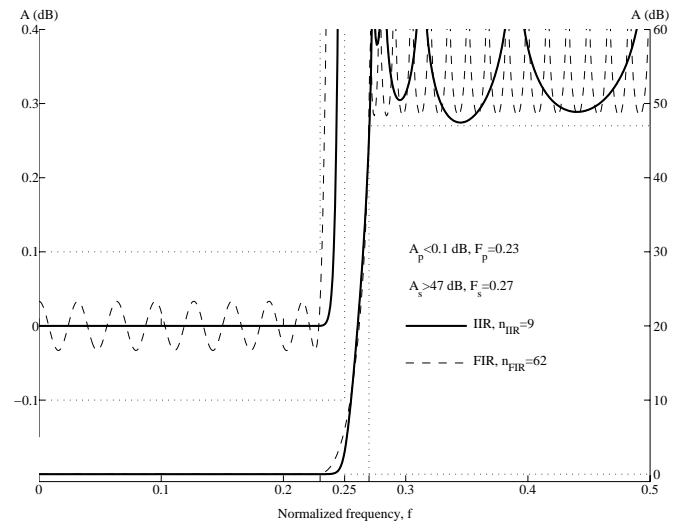
Znajući da je faktor selektivnosti half-band filtra jednak

$$\xi = \left(\frac{1}{\tan(\pi f_p)} \right)^2$$

dobijamo izraz za računanje koeficijenata β_i u zatvorenoj formi:

$$\beta_i = \frac{\xi + x_i^2 - \sqrt{(1 - x_i^2)(\xi^2 - x_i^2)}}{\xi + x_i^2 + \sqrt{(1 - x_i^2)(\xi^2 - x_i^2)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12)$$

Da bi ilustrovali prethodni postupak, projektovaćemo half-band filtar koji zadovoljava sljedeće specifikacije: granična učestanost propusnog opsega, $F_p = 0.23$, granična učestanost nepropusnog opsega, $F_s = 0.27$, maksimalno slabljenje u propusnom opsegu $A_p = 0.1\text{dB}$, minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu $A_s = 47\text{dB}$. Prvo, određujemo red filtra pomoću funkcije ellipord u Matlab-u i dobijamo da je red filtra koji zadovoljava postavljene zahtjeve $n=9$. Koeficijenti množača moraju pripadati opsegu $0.1022 < \beta_2 < 0.1482$, $0.3440 < \beta_3 < 0.4537$, $0.6148 < \beta_4 < 0.7238$, $0.8686 < \beta_5 < 0.9163$.



Slika 2: Slabljenje half-band IIR filtra bez množača 9-og reda (puna linija); i half-band FIR filtra 62-og reda (isprekidana linija)

Dobijeni half-band IIR filter bez množača je implementiran sa samo 21 sabiračem, 4 kola za kašnjenje i bez ijednog množača. Za realizaciju odgovarajućeg FIR filtera, koji zadovoljava iste specifikacije potreban je 31 sabirač, 31 kolo za kašnjenje i 16 množača. U [13] se može naći i opis VHDL implementacije IIR filtra.

IV ODREĐIVANJE RAZLIČITIH REALIZACIJA WDF PRIMJENOM SIMBOLIČKE ANALIZE

Digitalni talasni filtri su izvedeni iz pasivnih mikrotalasnih filtera bez gubitaka i ako su korektno projektovani, u potpunosti zadržavaju sve bitne prednosti pasivnih mikrotalasnih filtera, kao što je mala osjetljivost [14], [15]. Glavne prednosti digitalnih talasnih filtera su: izuzetna stabilnost, čak i u slučaju rada u nelinearnim uslovima, kao posljedica prekoračenja (overflow) i zaokruživanja (roundoff), mala potrebna dužina riječi za koeficijente, vrlo dobar dinamički opseg itd [14]. Sve ove osobine su, uglavnom, posljedica toga što se digitalni talasni filtri ponašaju u potpunosti kao pasivna kola [14].

Postoji veliki broj struktura sa kojima može da se realizuje digitalni filter. Kada bi svi filtri bili idealni (koeficijenti su tačni i nema kvantizacije), tada bi mogli da izaberemo bilo koju strukturu za implementaciju. Međutim, zbog kvantizacije koeficijenata i podataka, karakteristike filtra mogu značajno da odstupe od teorijske karakteristike i signal na izlazu filtra može da bude neprihvatljiv. Stoga se postavlja cilj da se izabere optimalna struktura. Jedan od kriterijuma izbora strukture jeste mala osjetljivost amplitudske karakteristike na male promene vrijednosti koeficijenata filtra. Izbor optimalne strukture može da bude veoma složen i dugotrajan. Na primjer, za funkciju prenosa 5-og reda, koja je realizovana pomoću svepropusnih (engleski izraz all-pass) sekcija prvog i drugog reda, sa dva konjugovano kompleksna pola i jednim realim polom postoje 2304 ekvivalentne realizacije [16]. Mnoge strukture, iako su različite, imaju iste osobine pa je analiza svih struktura nepotrebna. Klasični numerički postupci nijesu prihvatljivi, jer je praktično nemoguće ispitati sva svojstva neke strukture za sve moguće kombinacije i vrijednosti prenosnih funkcija. Numerička greška koja se javlja u korišćenju numeričkih algoritama mogla bi da prikaže da neke strukture imaju različite karakteristike iako imaju identične osobine. Korišćenjem simboličke analize moguće je analizirati sve bitnije osobine različitih struktura i jednostavno ih klasifikovati, jer se upoređuju izrazi, kao što je funkcija šuma, a ne veoma veliki broj numeričkih podataka.

Kako je broj struktura veoma veliki, u narednom poglavlju biće pokazano kako se generišu sve moguće strukture, kako se analiziraju njihove osobine i vrši

klasifikacija po određenom kriterijumu i kako se bira optimalna struktura po više kriterijuma, na primjer, da ima malu osjetljivost amplitudske funkcije, mali šum kvantizacije i univerzalnost strukture (jedna struktura se može koristiti za realizaciju različitih prenosnih funkcija uz male izmjene u strukturi).

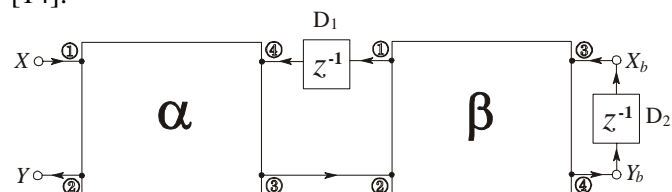
V REALIZACIJA DIGITALNIH TALASNIH FILTERA

Poznato je da postoje različite strukture digitalnih talasnih filtera, zavisno od različitih mogućnosti realizacije referentnog filtra. Između ostalih ističu se one strukture čija se realizacija može izvesti uz upotrebu eksplicitnih formula [14], a da istovremeno mogu zadovoljiti uslove filtera propusnika niskih učestanosti, filtera propusnika visokih učestanosti, filtera propusnika i filtera nepropusnika opsega učestanosti. Realizaciju rešetkastih digitalnih talasnih filtera, gdje je polovina množača zamijenjena pomjeračkim registrima i sabiračima (ili samo sa pomjeračkim registrima), možemo naći u [17]. Projektovanje rešetkastog digitalnog talasnog filtra, kada su obje grane rešetke realizovane kaskadnom vezom AP sekcija prvog i drugog reda, je prezentovano u [17]. Prenosna funkcija se tada može napisati u sledećem obliku:

$$H(z) = \frac{H_0(z) + H_1(z)}{2} \quad (13)$$

gdje $H_1(z)$ i $H_2(z)$ predstavljaju filtre propusnike svih učestanosti. Digitalna mreža propusnik svih učestanosti drugog reda može se realizovati uz pomoć samo dva množača i dva kola za kašnjenje, a svojstvo svepropusnosti ne zavisi od vrijednosti koeficijenata množača [18].

Realizacija digitalnih talasnih filtera koje razmatramo je bazirana na mrežama sa dva pristupa. Mreže sa dva pristupa su realizovane pomoću sabirača i jednog množača bez elemenata za kašnjenje. Mi ćemo razmatrati 5 vrsta ovih mreža koje je predložio Gaszi [14].



Slika 3. Blok dijagram digitalnog talasnog filtra

Blok dijagram digitalnog talasnog filtra drugog reda prikazan je na slici 3. Koeficijent množača za mrežu A je α a za mrežu B je β . Odgovarajuća prenosna funkcija može se zapisati u obliku

$$H_{\gamma,\theta}(z) = \frac{1 + \theta(1 + \gamma)z + \gamma z^2}{\gamma + \theta(1 + \gamma)z + z^2} \quad (14)$$

i ona je identična sa realizacijama koje su predložene u [19]. Gaszi je usvojio da su vrijednosti parametara α i β između 0 i 0.5, dok su vrijednosti parametra γ između 0 i 1, a vrijednosti parametra θ između -1 i 1. U principu, koeficijenti γ i θ imaju različito fizičko značenje. Jedan odgovara kvadratu modula pola i uvijek je pozitivan, a drugi je u vezi sa realnim dijelom pola i može da bude i pozitivan i negativan. Osnovni nedostatak svepropusnih realizacija koje je predložio Ansari [19] javlja se kod realizacija kod kojih je koeficijent množača blizak 1 (svi koeficijenti treba da budu manji od 1). U slučajevima kada je koeficijent veći od 0.5, ili manji od -0.5 množać treba realizovati kao (1-koeficijent) i on postaje manji od 0.5. Takav tip realizacija se sreće kod digitalnih talasnih filtara, kod kojih su svi koeficijenti manji od 0.5.

VI SIMBOLIČKI ALGORITAM

U zavisnosti od kombinacija parametara α i β , a na osnovu slike 3, moguće je izvesti 8 različitih realizacija sa adapterima koje je predložio Gazsi. Cilj je, generisati sve ove realizacije, a da bi to ostvarili predložena je procedura koja se sastoji u sledećem:

- Umjesto konvencionalnog $y = \pm x_1 \pm x_2$ uvesti simbolički sabirač $y = ax_1 + bx_2$.
- Opisati odgovarajuću realizaciju na način pogodan za simboličku analizu.
- Odrediti uslove koje moraju da zadovoljavaju simbolički parametri na ulazima sabirača da bi realizovali prenosnu funkciju.
- Na osnovu dobijenih uslova odrediti matricu prenosa i parcijalne matrice prenosa.
- Različite realizacije klasifikovati po nekom kriterijumu (na primjer šumu kvantizacije).

Ako na primjer, posmatramo realizaciju kod koje je $0.5 < \gamma < 1$ za $\alpha = 1 - \gamma$ i $0 < \theta \leq 0.5$ za $\beta = \theta$ tada je njena prenosna funkcija može zapisati u obliku:

$$H_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1 + \beta(2 - \alpha)z + (1 - \alpha)z^2}{1 - \alpha + \beta(2 - \alpha)z + z^2}$$

ili u funkciji parametara γ i θ kao:

$$H_{\gamma,\theta}(z) = \frac{1 + \theta(1 + \gamma)z + \gamma z^2}{\gamma + \theta(1 + \gamma)z + z^2}$$

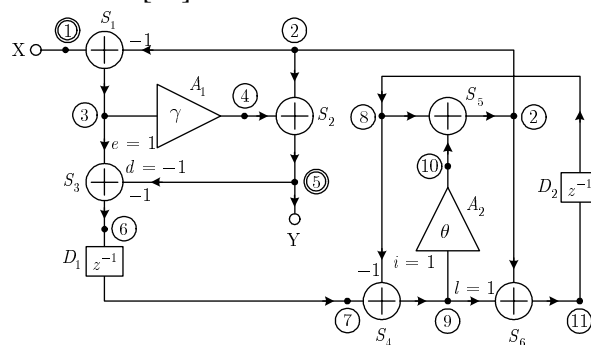
Primjenom programa iz [13], određujemo da postoji ukupno 16 različitih realizacija. Od ovih 16 različitih realizacija, potrebno je izdvojiti one koje imaju različite prenosne funkcije šuma na izlazu iz pojedinih množača. Za analiziranu realizaciju primjenom dobijenih uslova određenih pod c) treba odrediti matricu prenosa i za ovu kombinaciju parametara α i β imamo dvije različite realizacije, koje imaju različite prenosne funkcije šuma,

pa prema tome imamo i dvije različite varijanse šuma kvantizacije izražene sledećim relacijama:

$$\sigma_{\alpha\beta_1} = \frac{q^2}{12} \left[\frac{2(2+3r^2+r^4+2r \cos \theta)}{(1-r^2)(1+r^2+2r \cos \theta)} \right]$$

$$\sigma_{\alpha\beta_2} = \frac{q^2}{12} \left[\frac{2(2+3r^2+r^4-2r \cos \theta)}{(1-r^2)(1+r^2-2r \cos \theta)} \right] \quad (15)$$

Analizom svih mogućih realizacija, na kraju dolazimo do realizacije (slika 5) pomoću koje možemo dobiti sve ostale realizacije klasifikovane po varijansama šuma kvantizacije samo promjenom simboličkih parametara na sabiračima [13].



Slika 4. Realizacija sa parametrima:

$$0 < \gamma \leq 0.5 \text{ za } \alpha = \gamma \text{ i } 0 < \theta \leq 0.5 \text{ za } \beta = \theta$$

VII ZAKLJUČAK

U radu je predstavljen jedan od mogućih načina za aproksimaciju linearne faze half-band FIR filtra sa izjednačenom talasnošću. Aproksimaciona funkcija optimalnog FIR filtra sa linearnom fazom izračunava se primjenom Remezovog algoritma. Pokazano je da optimalni filter ima Čebiševljevo ponašanje u propusnom i nepropusnom opsegu, gdje Čebiševljevo ponašanje znači da maksimum varijacije neke funkcije ima minimalnu vrijednost u određenom opsegu nezavisno promjenljive. Problem izračunavanja koeficijenata funkcije prenosa je predstavljen kao problem izračunavanja aproksimacione funkcije polinomskog tipa, odnosno, kao problem izračunavanja koeficijenata neparne polinoma koji ima Čebiševljevo ponašanje u određenom opsegu nezavisno promjenljive. Takođe, predstavljena je i procedura projektovanja half-band IIR filtra čiji se koeficijenti izračunavaju direktno na osnovu izvedenih relacija u zatvorenom obliku u funkciji granične učestanosti propusnog opsega. Procedura projektovanja je zasnovana na specijalnoj klasi eliptičkih funkcija prenosa minimalnih Q faktora (EMQF). Predloženom procedurom i simboličkom analizom moguće je na jednostavan način odrediti sve moguće realizacije i klasifikovati ih po određenom kriterijumu. Simbolička analiza omogućava da se nađu sve strukture, pa se analiza i klasifikacija može uraditi i za strukture koje nijesu poznate u literaturi. To znači, da se primjenom simboličke analize može uraditi ne samo analiza već i sinteza digitalnih filtara.

LITERATURA

- [1] H. Johansson, L. Wanhammar, "Filter Structures Composed of All-Pass and FIR Filters for Interpolation and Decimation by a Factor of Two", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II*, Vol. 46, No.7, pp. 896-905, July 1999.
- [2] S. Powell, M. Chau, "A Technique for Realizing Linear Phase IIR Filters", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, pp. 2425-2435, November 1991.
- [3] T. Saramäki, "On the Design of Digital Filters as a Sum of Two All-Pass Filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-32, No. 11, pp. 1191-1193, November 1983.
- [4] H. Johansson, L. Wanhammar, "Wave Digital Filter Structures for High-Speed Narrow-Band and Wide-Band Filtering", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II*, Vol. 46, No.6, pp. 726-741, June 1999.
- [5] K. Surma-aho, T. Saramäki, "A systematic Technique for Designing Approximately Linear Phase Recursive Digital Filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II*, Vol. 46, No.7, pp. 957-963, July 1999.
- [6] T. Saramäki, M. Renfors, "A Novel Approach for the Design of IIR Filters as a Tapped Cascaded Interconnection of Identical Allpass Subfilters", in *IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, Philadelphia, PA, May 4-7, 1987, Vol. 2, pp. 629-632.
- [7] J. Yli-Kaakinen, T. Saramäki, "Design of Very Low-Sensitivity and Low-Noise Recursive Filters Using a Cascade of Low-Order Lattice Wave Digital Filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II*, Vol. 46, No.7, pp. 906-914, July 1999.
- [8] M. D. Lutovac, D. V. Tošić, B. L. Evans, **Filter design for pignal processing using MATLAB and Mathematica**, Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [9] P. P. Vaidyanathan, T. Q. Nguyen, "A "TRICK" for the Design of FIR Half-Band Filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-34, pp. 297-300, March 1987.
- [10] Lj. Milić, M. Lutovac, "Design of Multiplierless Elliptic IIR Filters with a Small Quantization Error", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 47, No.2, pp. 469-479, February 1999.
- [11] M. D. Lutovac, Lj. D. Milić, "Approximate Linear Phase Multiplierless IIR Halfband Filter", *IEEE Transactions on Signal Processing Letters*, Vol. 7, No. 3, pp. 52-53, March 2000.
- [12] M. D. Lutovac, Lj. D. Milić, "Design of Computationally Efficient Elliptic IIR filters with a Reduced Number of Shift-and-Add Operations in Multipliers", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, No 10, pp. 2422-2430, October 1997.
- [13] B. Lutovac, "*Nove strukture i algoritmi za realizaciju efikasnih digitalnih filtara primjenom simboličke analize*", Doktorska disertacija, mart 2003. godine, ETF Beograd.
- [14] Gazsi, "Explicit Formulas for Lattice Wave Digital Filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-32, No. 1, pp. 68-88, January 1985.
- [15] A. Fettwies, H. Levin, A. Sedlemeyer, "Wave digital lattice filters", *Int. J. Circuit Theory Appl.*, pp. 203-211, June 1974.
- [16] P. P. Vaidyanathan, S. K. Mitra, Y. Neuvo, "A New Approach to the Realization of Low-Sensitivity IIR Digital Filters", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, No. 2, pp. 350-361, April 1986.
- [17] M. Lutovac, Lj. Milić, "Lattice Wave Digital Filters with a Reduced Number of Multipliers", *Yugoslav IEEE MTT Chapter Informer*, No. 3, pp. 29-39, Jun 1996.
- [18] S. K. Mitra, K. Hirano, "Digital All-Pass Networks", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, No. 5, pp. 688-700, September 1974.
- [19] R. Ansari, B. Liu, "A Class of Low-Noise Computationally Efficient Recursive Digital Filters with Applications to Sampling Rate Alterations", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, No. 1, pp. 90-97, February 1985.

Abstract: In this paper, we describe efficient digital filters, which should resolve contradictory demands related to high speed and small consumption. We present calculation of optimal FIR filters directly, without application of iterative algorithms to optimize coefficients for implementation of multipliers. An algorithm is used which enables design of multiplierless IIR filters. Using symbolic analysis we can analyze most important properties of different structures and perform their classification in very simple manner, because we compare expressions instead of comparing large number of numerical results.

AN APPLICATION SYMBOLIC ANALYSIS
FOR DESIGN EFFICIENT DIGITAL FILTERS

Budimir Lutovac